Capitolo 2

Meno per meno fa più

La distinzione che per prima balza all'occhio tra aritmetica e algebra è l'impiego libero di quantità negative che si ha in algebra, a differenza delle restrizioni presenti in aritmetica. Ad esempio, sottrarre un numero da uno minore di esso non viene contemplata nell'aritmetica delle scuole elementari mentre è un'operazione lecita in algebra. L'impiego delle quantità negative non deve però essere inteso come un fatto scontato: al contrario, la loro introduzione ha rappresentato un ostacolo concettuale rilevante, come testimoniato dai dibattiti di cui ancora si trova traccia su alcune riviste scientifiche del XIX secolo. La manipolazione formale di quantità con segno e, nello specifico, la moltiplicazione tra quantità negative ha una lunga storia, correlata ma non sovrapponibile totalmente a quella dei numeri negativi. Le regole per il prodotto tra numeri con segno ha una storia antichissima, che si può far risalire a Diofanto e che cerchiamo di tratteggiare a grandi linee in questo capitolo che trae vantaggio dal lavoro di Mario Ferrari [9]. Scorrendo la storia si possono riscontrare alcune linee di pensiero ben marcate, come l'approccio diofanteo in cui la regola dei segni viene illustrata nell'ambito dell'aritmetica tradizionale esteso tacitamente all'algebra da molti altri, quali ad esempio, Stevin e Viète; un approccio che privilegia il ruolo dello zero come elemento neutro dell'addizione, di cui si trova traccia in Colin MacLaurin. L'approccio in cui la regola dei segni non è una regola per il prodotto tra numeri quanto una regola di combinazione tra i segni, che può esser fatto risalire a Cauchy; infine, l'approccio basato sul principio di permanenza delle proprietà formali di George Peacock ed Hermann Hankel che, benché non esente da critiche, mette in evidenza come la regola dei segni in algebra sia una legge da assumere e non un teorema da dimostrare. In mezzo, una pletora di approcci alternativi, alcuni di grande ingegno, che cercheremo di fondere in un quadro organico.

2.1 Compensazioni

Iniziamo la storia della regola dei segni dall'*Aritmetica* di Diofanto giuntaci incompleta. Diofanto parte da una definizione euclidea di numero:

Numero è una pluralità composta di unità.[1] ([7], p. 3)

e dunque taglia fuori dal concetto di numero non solo l'unità ma anche i numeri negativi. Nonostante questa restrizione, proprio nell'*Aritmetica* si trova la prima formulazione corretta della regola dei segni:

Meno moltiplicato per meno fa meno e meno per più fa meno.[2] ([7], p. 13)

dove però i termini *minus* e *plus* ($\lambda\varepsilon\iota\psi\sigma$ e $\upsilon\pi\alpha\varrho\xi\iota\sigma$) non indicano numeri relativi ma esprimono i concetti di ciò che manca o non esiste e di ciò che esiste. Oltre ad enunciare la regola, Diofanto ne fa delle applicazioni come, ad esempio, nel Problema 36 del libro quarto

Trovare tre numeri tali che il prodotto di due qualsiasi abbia un rapporto assegnato con la loro somma.[3] ([7], p. 287)

Detti x_1, x_2, x_3 i tre numeri, Diofanto considera il caso numerico in cui

$$x_1x_2 = 3(x_1 + x_2) \qquad x_2x_3 = 4(x_2 + x_3) \qquad x_3x_1 = 5(x_1 + x_3) :$$

posto $x_2 = x$ ed espressi gli altri due numeri in funzione di x, il problema richiede di esprimere il prodotto $(x-3)(x-4)$ che viene correttamente calcolato come $x^2 - 7x + 12$, risultato che si ottiene solo applicando la regola dei segni che Diofanto non giustifica. In epoca moderna, Luca Pacioli, François Viète e Simon Stevin daranno invece giustificazioni alla regola.

Nel 1494 Pacioli pubblicò la *Summa de aritmetica geometria proportioni et proportionalita* in cui la regola dei segni viene enunciata in questi termini

Più via più sempre fa più
Meno via meno sempre fa più
Più via meno sempre fa meno
Meno via più sempre fa meno. (*cfr.* [9], p. 321)

e viene spiegata ricorrendo ad un esempio numerico, svolgendo il prodotto $(10-2) \times (10-2) = 64$ ricorrendo implicitamente alla proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: dapprima Pacioli calcola i prodotti parziali $10 \times 10 - 2 \times 10 - 10 \times 2 = 60$ per cui $-2 \times (-2) = +4$, se vogliamo ottenere il risultato corretto.

Viète parla della regola dei segni nella *In Artem analyticem Isagoge* [25] dove getta le regole del gioco da rispettare nel fare algebra. Nel capitolo IV di questo libretto su cui torneremo in seguito, Viète opera la distinzione fondamentale tra *logistica numerosa* e *logistica speciosa*, cioè tra il calcolo numerico e quello letterale, segnando un confine netto tra artimetica ed algebra in senso stretto:

[1] Omnes numeros compositos esse ex aliqua unitatum quantitate.
[2] Minus multiplicatum in minus facit plus et minus in plus facit minus.
[3] Invenire numeros tres tales ut binorum quorumvis productum ad summam rationem habeat datam.

il calcolo numerico è quello che si esegue operando tramite numeri, il calcolo delle specie è quello che opera ricorrendo alle specie o alle forme delle grandezze, grazie al ricorso di lettere dell'alfabeto, ad esempio.[4] ([25], p. 4)

Entrambe le *logistiche* ubbidiscono alle regole (*praecepta canonica*), delle quattro operazioni fondamentali di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione: in questa sede è dato rilievo alla regola dei segni.

Parlando della sottrazione, Viète enuncia correttamente che $A-(B+D)=A-B-D$ e, quando deve considerare $A-(B-D)$ afferma, come è giusto che sia, $A-(B-D)=A-B+D$ fornendo questa giustificazione:

Se ora si toglie D da B e $B-D$ viene sottratto ad A, il residuo sarà A meno B più D perché sottraendo B si sottrarrà una grandezza maggiore del dovuto che deve essere compensata dall'addizione della grandezza D.[5] ([25], p.5)

Passando alla regola dei segni, Viète dapprima enuncia la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma e poi osserva che il prodotto di una quantità positiva per un'altra quantità di segno indeterminato assume il segno di quest'ultima. Come *conseguenza* di questa regola (*praeceptum*) Viète deduce la regola dei segni. Considerando il prodotto $(A-B)(D-G)$ egli richiama che $A(-G)=-AG$ perché altrimenti il prodotto di A con $(D-G)$ non sarebbe svolto in modo accurato in quanto bisogna diminuire $A\times D$; similmente quando si svolge il prodotto $-B(D-G)$, fermandosi a $-BD$ si commetterebbe un errore che occorre *compensare* aggiungendo BG.

Poiché il tutto è uguale alle sue parti, così i prodotti con i segmenti di una certa grandezza sono uguali al prodotto con l'intera grandezza. E quando una grandezza positiva viene moltiplicata per un'altra grandezza positiva, il risultato sarà positivo, per una grandezza negativa, negativo. Conseguenza di questa regola è che il prodotto di due grandezze negative è positivo in quanto se si moltiplica $A-B$ per $D-G$, il risultato del prodotto tra A che è positiva e l'opposto di G, rimane negativo perché altrimenti si sottrarrebbe troppo ed il prodotto con A non sarebbe accurato cosicché per compensare l'errore occorre che il prodotto tra grandezze B e G entrambe negative sia positivo.[6] ([25], pp.5-6)

L'argomento di Viète incontrò una certa fortuna, tanto che lo si trova sostanzialmente immutato in testi di molto posteriori: ad esempio nel *Cours de*

[4] Logistice numerosa est quae per numeros, speciosa quae per species seu rerum formas exhibetur, utpote per Alphabetica elementa.

[5] At si iam negetur D de ipsa B, & B minus D ab A subtrahenda sit, Residua erit A minus B plus D, quoniam subtrahendo B magnitudinē subtrahitur plus æquo per magnitudinem D ideò additione illius compensandum.

[6] Quoniam totum est suis partibus æquale, ideoque facta sub segmentis alicuius magnitudinis æquantur facto sub tota. Et cum adfirmatum unius magnitudinis nomen ducetur in alterius quoque magnitudinis nomen adfirmatum, quod fiet erit adfirmatum, & in negatum, negatum. Cui præcepto etiam consequens est ut ductione negatorum nominum alterius in alterum, factum sit adfirmatum, ut cum $A-B$ ducetur in $D-G$, quoniam id quod fit ex adfirmata A in G negatam, manet negatum, quod est nimium negare minuereve, quandoquidem A est ducenda magnitudo producta non accurata. Et similiter quod fit ex negata B in D adfirmatam, manet negatum, quod est rursum nimium negare quandoquidem D est ducenda magnitudo producta non accurata, ideo in compensationem dum B negata ducitur in G negatam factum est adfirmandum.

Mathématiques di Étienne Bezout [2] che si esprime in questi termini, illustrando la regola nel caso del prodotto $(a-b)\times(c-d)$:

In effetti, siccome il moltiplicatore è più piccolo di c di una quantità pari a d, occorre che non si prenda il moltiplicando se non un numero di volte quante unità sono in c diminuito di d; siccome non è possibile fare questa riduzione prima della moltiplicazione, si può prendere dapprima $a-b$ tante volte quante sono le unità in c, cioè moltiplicare $a-b$ per c e poi sottrarre $a-b$ preso tante volte quante unità sono contenute in d, cioè a dire, togliere il prodotto di $a-b$ per d. ([2], p.18)

Ancora più chiara è la spiegazione di Nicolas Louis de La Caille (1713-1762), riportata alle pp. 70-72 di [11].

Riprendendo il flusso storico degli eventi, soffermiamoci ora sul belga Simon Stevin (Stevino, 1548-1620) che ha una concezione di numero più estensiva di quella di Diofanto in quanto comprende l'unità:
Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chascune chose. ([24], p. 495)

Stevino aggiunge una spiegazione (*explication*)
Come l'unità è il numero col quale la quantità di una cosa spiegata si dice uno: e due [il numero] col quale la si definisce due: e metà [il numero] col quale la si chiama metà: e radice di tre [il numero] col quale la si chiama radice di tre.[7] ([24], p.495)

Per quanto vaga la spiegazione data da Stevino, essa evidenzia un punto importante: tutti i numeri *positivi* sono posti sullo stesso piano: naturali, razionali ed irrazionali. Inoltre, il numero è legato al concetto di quantità. Certamente è il distacco dall'impianto euclideo ciò che più colpisce e Stevino ne è consapevole al punto da aggiungere una riflessione sul fatto che l'unità sia un numero:
È nota l'opinione comune, che l'unità non sia affatto un numero ma solo il suo principio o inizio e che essa sta al numero come il punto al segmento, ciò che noi neghiamo argomentando in questo modo:

La parte è della stessa materia del tutto,
L'unità è parte della moltitudine di unità,
Ergo l'unità è della stessa materia della moltitudine di unità;
ma la materia della moltitudine di unità è il numero,
Dunque la materia dell'unità è numero.

E chi lo nega, fa come chi neghi che un pezzo di pane sia fatto di pane. ([24], p. 496)

Ora che l'unità è numero e che si è insistito sulla differenza tra punto ed unità, chi prende il posto del punto in campo numerico?

L'unità è parte del numero, il punto non è parte della linea e così ancora: l'unità non rappresenta come numero ciò che il punto è per la linea. Chi dunque

[7] Comme l'unité est nombre par lequel la quantité d'une chose expliquée se dict un: Et deux par lequel on la nomme deux: Et demi par lequel on l'appelle demi: Et racine de trois par lequel on la nomme racine de trois &.

gli corrisponde? Io dico che è lo 0 *(che viene detto comunemente Nulla, e che noi chiamiamo principio nella successiva definizione 3ª) ciò che non solo testimonia le loro somiglianze ma anche gli innegabili effetti. Le somiglianze sono queste:*

Come il punto viene aggiunto ad un segmento senza esserlo, così 0 si aggiunge ad un numero, senza che lo sia.

Come il punto non si divide in parti, così lo zero non si divide in parti.

Come molti punti, fossero pure infiniti non sono un segmento, così tanti 0*, anche una moltitudine infinita, non sono un numero.*

Come il segmento AB ne si può accrescere aggiungendogli il punto C, così non è possibile aumentare il numero D[=]6 aggiungendogli E[=]0 perché aggiungendo 0 a 6 non si ha che 6.

Stevino supera la concezione euclidea di numero ma non l'idea euclidea di segmento, in virtù della quale un segmento *non* è composto da (infiniti) punti. La corrispondenza non è tra numeri e punti di una semiretta ma tra numeri e *segmenti* e lo 0 vede sacrificata la propria identitàdi numero perché nell'analogia gioca il ruolo del punto. Stevino va oltre e, per conservare la corrispondenza tra segmenti e numeri compie un'analogia un po' ardita.

Tuttavia, se si ammette che [il segmento] AB sia prolungabile fino al punto C in modo che AC sia un segmento continuo, allora AB è accresciuta grazie al punto C; e similmente si si ammette che D[=]6 sia prolungato fino ad E[=]0 cosicché DE[=]60 dia un numero continuo che fa 60 allora D=6 si aumenta grazie allo zero.

Il valore [posizionale] delle cifre viene visto in corrispondenza dell'operazione geometrica di prolungare un segmento fino a raggiungere un punto.

Nel libro II della *Arithmétique*, Stevino considera le operazioni tra i numeri interi, razionali ed irrazionali (un nome, quello di irrazionale che Stevino rifiuta categoricamente) per poi passare alle regole per il prodotto dei *multinomi radicali interi* cioè di espressioni quali $a - b$ o $c - d$. Egli enuncia il *teorema* seguente

Più moltiplicato per più dà più per prodotto, e meno moltiplicato per meno, dà più per prodotto, e più moltiplicato per meno dà meno o meno moltiplicato per più dà meno come prodotto. ([24], p. 560)

La dimostrazione di Stevino segue uno schema ternario, i cui primi due punti sono di natura pedagogica dal momento che costituiscono la spiegazione del dato (*explication du donné*) e della tesi (*explication du requis*). Per spiegare i dati, Stevino considera i binomi interi $8 - 5$ e $9 - 7$ da moltiplicare tra loro. Come Pacioli, utilizza la proprietà distributiva del prodotto per calcolare, secondo quanto dice il teorema il risultato del prodotto. La spiegazione della tesi si riduce in effetti ad una riproposizione dell'enuciato utilizzando i simboli $+$ e $-$, invece delle parole. La dimostrazione si articola in due parti: anzitutto Stevino osserva che, essendo $8 - 5 = 3$ e $9 - 7 = 2$, il prodotto vero (*vrai produict*) deve essere 6, che è compatibile solo con la regola dei segni enunciata nel teorema.

Egli propone poi una dimostrazione geometrica (Figura 2.1) in cui si costruisce il rettangolo DE sui segmenti $AD = 8$ e $AE = 9$ per poi staccare su questi i segmenti $AB = 8 - 5 = AD(= 8) - DB(= 5)$ e $AD = AE(= 9) - CE(= 7)$. Il

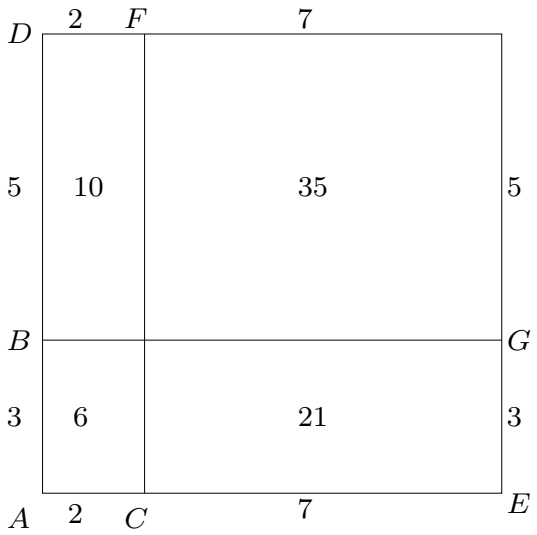

Figura 2.1: Argomento geometrico utilizzato da Stevino a supporto della validità della regola dei segni ([24], p. 561).

prodotto richiesto è l'area del rettangolo di lati AB e BC, il cui valore 6 è ciò che serve da aggiungere alle aree dei rettangoli CG e BF per ottenere l'area del rettangolo ED.

Non vi sono, in questa spiegazione, numeri negativi ma la regola serve per ricomporre il risultato di un prodotto tra quantità positive che vengono viste come differenze tra quantità positive.

Nel 1690, Michel Rolle (1652-1719) pubblicò un *Traité d'Algèbre* dove, dopo aver spiegato con i consueti modelli economici o cinematici il senso dell'essere una quantità minore di nulla, egli offre tre argomenti per illustrare un punto che creava molte difficoltà nei principianti:

I principianti fanno fatica a capire perché il segno $-$ si cambi in $+$ nella sottrazione dei numeri negativi e perché il numero che resta superi quello dal quale si è partiti per la sottrazione. Ecco diversi modi per spiegarlo. ([4], pp. 16-17)

Rolle utilizza la regola sull'esempio numerico $14 - (-2) = 16$ con questi tre argomenti

1) Si suppone dapprima di dover sottrarre da 14 il numero 5-2: $14 - (5 - 2)$. Rolle osserva, come Viète, che se si sottrae 5 da 14 si sottraggono due unità di troppo che vanno ripristinate per cui $14 - (5 - 2) = 14 - 5 + 2$.

Se si sopprime il 5, ovvero se si suppone che al posto del 5 non vi sia niente, allora il 5-2 da sottrarre si cambia in -2 e la sottrazione passa da $14 - 5 + 2$ *a* $14 + 2$*, cioè 16.* ([4] p. 16)

2) Il secondo argomento si basa sull'introduzione dello 0: la differenza tra 14 e 0 è 14; quella tra 0 e -2 è 2 e dunque la differenza tra 14v e -2 è 16.

3) L'ultimo argomento è il più interessante perché costruito sulla base di tre principi che Rolle chiama *indubitabili* (*indubitabiles*):

a): Il significato di sottrazione: sottrarre una quantità da un'altra significa trovare una terza grandezza che, aggiunta alla seconda, ridia la prima;

b) se si suppone che il tutto sia l'unione di due parti e che dal tutto si sottrae una parte, allora l'altra parte è ciò che rimane dalla sottrazione;

c) 2-2=0.

Dal principio c) Rolle deduce che $14+2-2=14$; per b) si ha che, tolta da 14 la prima parte (-2) ciò che rimane è l'altra parte, 14+2. D'altro canto, sottraendo -2 a 14 si ottiene un risultato che, addizionato a -2 dà 14, per a). Ora, da c) segue che aggiungendo -2 a 14+2 si ha pure 14 e quindi 14+2 è il risultato dell'operazione.

A fianco di questi argomenti *euristici* per validare la regola dei segni, vi sono altri che, come già avevano fatto i matematici indiani, non giustificano affatto la regola dei segni. Tra questi citiamo Isaac Newton che, nella *Arithmetica Universalis* pubblicata, a sua insaputa, nel 1707, scrive[8]:

I termini semplici algebrici[9] *si moltiplicano facendo il prodotto tra i coefficienti numerici e fra le parti letterali e stabilendo che il prodotto sia positivo se entrambi i fattori sono positivi o entrambi negativi, e negativo in caso opposto.*[10] ([14], p. 18)

Osserviamo come Newton separi i tre tempi nella moltiplicazione di due monomi: dapprima il prodotto dei coefficienti numerici, quindi quello delle parti letterali e, infine, la combinazione dei segni introdotta con un secco *stabilendo* (*statuendo*). Come Stevino, anche Newton si distacca dalla concezione euclidea di numero ma, a differenza di Stevino, la sua definizione è precisa:

Intendiamo con numero non tanto una moltitudine di unità, quanto il rapporto astratto di una quantità qualsiasi con un'altra dello stesso genere che viene presa per unità.[11] ([14], p. 4)

2.2 Il ruolo dello zero

Colin MacLaurin (1698-1746) scrisse un trattato di Algebra che venne pubblicato nel 1748, due anni dopo la sua morte. Nel capitolo iniziale di quest'opera egli traccia un parallelo tra geometria ed algebra osservando che

In Geometry, lines are represented by a Line, Triangles by a triangle, and other Figures by a Figure of the same kind; but, in Algebra, quantities are represented by the same letters of the alphabet; and various signs have been imagined for representing their affections, relations and dependencies. In geometry the representations are more natural, in algebra more arbitrary. ([12], p. 2)

[8] Seguo qui il testo latino dell'edizione del 1732.

[9] cioè i monomi

[10] Simplices temini Algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros & species in species ac statuendo factum Affrimativum si ambo factores sint affirmativi aut ambo negativi, & Negativum si secus.

[11] Per numerum non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem que pro unitate habetur rationem intelligimus.

A fronte di questa maggior arbitrarietà che può rendere il linguaggio algebrico meno evidente di quello geometrico, corrisponde però una maggiore applicabilità:
Thus, the evidence of Geometry is sometimes more simple and obvious; but the use of Algebra more extensive, and often more ready: especially since the mathematical sciences have acquired so vast an extent, and have been applied to so many enquires. ([12], p.2)

Dopo aver spiegato che
Quantity is what is made up of parts, or is capable of being greater or less. ([12], p. 3)

MacLaurin passa ad introdurre le operazioni, dicendo che una quantità
is increased by Addition, and diminished by Subtraction, which are therefore the two primary operations that relate to quantity. Hence it is, that any quantity may be supposed to enter into algebraic computations two different ways which have contrary effects; either as an Increment or as a Decrement. (...) The sign + (plus) is the Mark of Addition, and the sign − (minus) of Subtraction. ([12], pp. 3-4)

A questo livello, appare che una quantità a numerica si possa presentare in due *modalità* differenti, come incremento o decremento, e quindi che vi sia un primato dell'operazione che determina come considerare una quantità. Procedendo, troviamo ancora che

When a is greater than b, then $a-b$ is itself an Increment; when $a=b$, then $a-b=0$; when a is less than b, then $a-b$ is itself a decrement. ([12], p. 4)

Ed ora MacLaurin (Fig. 2.2) può distinguere tra l'intensità (*magnitude*) di una grandezza ed il tipo (*kind*):

As Addition and Subtraction are opposite, or an Increment is opposite to a Decrement, there is an analogous Opposition between the Affections of Quantities that are considered in the mathematical Sciences. As between Excess and Defect; between the Value of Effects or Money due To a Man and Money due By him; a Line drawn towards the Right and a Line drawn to the Left; (...). When two Quantities equal in respect to Magnitude, but of those opposite Kinds, are joined together, and conceived to take place in the same Subject, they destroy each others Effect, and their amount is Nothing (...) And when a greater Quantity is taken from a lesser of the same kind, the Remainder becomes of the opposite kind. Thus if we add the Lines AB and BD together, their sum is AD; but if we are to subtract BD from AB, then $BC = BD$ is to be taken the contrary Way towards A, and the Remainder is AC; which, when BD, or BC exceeds AB, becomes a Line on the other side of A. ([12], p. 5)

Debiti e crediti, moti su una retta che avvengono in versi opposti: sono modelli per giustificare la natura *reale* e non fittizia o convenzionale delle quantità da sottrarre. Notiamo però che adesso si è dato senso ad una sottrazione in cui il sottraendo abbia grandezza superiore al minuendo ma quest'ultimo è inteso come quantità positiva:

A Quantity that is to be added is likewise called a Positive Quantity; and a Quantity to be subtracted is said to be Negative: They are equally real, but

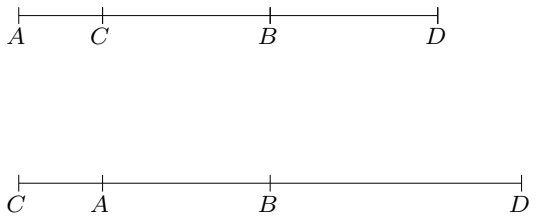

Figura 2.2: Significato delle quantità negative in MacLaurin.

opposite to each other, so as to take away each other's Effect, in any Operation, when they are equal as to Quantity. Thus $3 - 3 = 0$*, and* $a - a = 0$*. But tho'* $+a$ *and* $-a$ *are equal as to Quantity, we do not suppose in Algebra that* $+a = -a$ *are equal; because to infer Equality in this Science, they must not only be equal as to Quantity, but of the same Quality. A Decrement may be equal to an Increment, but it has in all Operations a contrary Effect; (...) it is on account of this Contrariety that a Negative Quantity is said to be less than Nothing, because it is opposite to the Positive, and diminishes it when joined to it, whereas Addition of* 0 *has no Effect. But a Negative is to be considered no less as a Real Quantity than the Positive.* ([12], pp. 6-7).

Negli esempi proposti da MacLaurin, ci sono *somme* tra quantità di segni opposti e così pure sottrazioni tra quantità di segno opposto, indice a mio parere di una certa consapevolezza della distinzione tra quantità negative e operazione di sottrazione. D'altronde, nel giustificare la regola in base alla quale sottrarre una quantità negativa è la stessa cosa che aggiungere il suo opposto, MacLaurin si esprime in questo modo:

To subtract any Quantity, either Positive or Negative, is the same as to add the opposite Kind. (...) It is evident that to subtract or take away a Decrement is the same as adding an equal Increment. If we take away $-b$ *from* $a - b$*, there remains* a*; and if we add* $+b$ *to* $a - b$*, the Sum is likewise* a*.* ([12], p. 11)

Il punto saliente, a mio parere, è che MacLaurin distingua l'azione di sottrarre (*subtract or take away*) dalla quantità $-b$ che viene sottratta, nella quale il segno negativo fa parte integrante della quantità.

Poco dopo, Mc Laurin è pronto per enunciare la regola dei segni che viene illustrata spiegata separatamente nei quattro casi che si possono presentare:

Case I. When any positive Quantity, $+a$*, is multiplied by any positive Number,* $+n$*, the Meaning is, That* $+a$ *is to be taken as many times as there are Units in* n*; and the Product is evidently* na*.* ([12], p. 12)

Qui non vi sono problemi particolari, il prodotto di numeri positivi viene introdotto con l'addizione ripetuta.

Case II. When $-a$ *is multiplied by* n*, then* $-a$ *is to be taken as often as there are Units in* n*, and the Product must be* $-na$*.* ([12], p. 12)

Al termine dell'elenco dei quattro casi possibili, MacLaurin sentirà la necessità di *illustrare* (*illustrate*) ancora il caso II:

By the definitions, $+a - a = 0$; therefore, if we multiply $+a - a$ by n, the Product must vanish or be 0, because the Factor $a - a$ is 0. The first term of the Product is $+na$ (by Case I.) Therefore the second Term of the Product must be $-na$ which destroys $+na$; so that the whole Product must be $+na - na = 0$. Therefore, $-a$ multiplied by $+n$ gives $-na$. ([12], p. 13)

MacLaurin dà per scontata la proprietà distributiva e pone in evidenza il ruolo privilegiato dello 0 rispetto all'addizione.

Case III. Multiplication by a positive Number implies a repeated Addition: But Multiplication by a Negative implies a repeated Subtraction. And when $+a$ is to be multiplied by $-n$, the Meaning is that $+a$ is to be subtracted as often as there are Units in n: Therefore the Product is negative, being $-na$.

MacLaurin non si riferisce come altri, implicitamente, alla proprietà commutativa del prodotto ma interpreta la moltiplicazione per $-n$ come *sottrazione* ripetuta, anziché come addizione ripetuta. Infine, il caso IV, il più spinoso:

Case IV. when $-a$ is to be multiplied by $-n$, then $-a$ is to be subtracted as often as there are Units in n; but (by §10) to subtract $-a$ is equivalent to adding $+a$, consequently the Product is $+na$. ([12], p. 13)

Anche qui Mc Laurin aggiunge un'illustrazione della regola

If we multiply $+a - a$ by $-n$, the first Term of the Product being $-na$, the latter Term of the product must be $+na$, because the two together must destroy each other, or their Amount be 0, since one of the factors (viz. $a - a$) is 0. Therefore $-a$ multiplied by $-n$ must give $+na$. ([12], p. 13).

Il ruolo dello privilegiato dello 0 emerge in altri due approcci: quello contenuto nelle *Institutiones Analyticae* [19] di Vincenzo Riccati (1707-1775) e Gerolamo Saladini (1731-1813), pubblicato nel 1765 e quello presente nei *The elements of Algebra in Ten Books* di Nicholas Saunderson (1682-1739), pubblicato nel 1740.

Vincenzo Riccati e l'allievo Gerolamo Saladini, dopo aver utilizzato l'analogia cinematica del verso di percorrenza per distinguere tra quantità positive e negative, illustrano la regola dei segni in questi termini:

Siccome il moltiplicatore altro non mostra che il numero di volte in cui bisogna prendere la quantità da moltiplicare, se entrambi sono positivi, lo sarà evidentemente anche il prodotto e lo sarà tanto di più quanto più grande è il moltiplicatore, e tanto meno quanto minore è il moltiplicatore; pertanto, se il moltiplicatore è zero, lo sarà anche il prodotto. Quindi se il moltiplicatore decresce di più, al punto da diventare negativo, cioè minore di zero, occorre che anche il prodotto decresca di più e diventi dunque minore di zero, cioè negativo. Ecco dunque in che modo è evidente che il prodotto di una quantità positiva per una negativa sia negativo. Supponiamo ora che occorra moltiplicare una quantità negativa per una positiva. Da quanto dimostrato, il prodotto sarà negativo e lo sarà tanto di meno in quest'ordine, cioè tanto più minore di 0 quanto più cresce il moltiplicatore, o diventa maggiore, e quanto più piccolo sarà il moltiplicatore, tanto più il prodotto sarà minore nell'ordine delle quantità negative, cioè più vicino allo zero; cosicché il prodotto cresce sempre se il moltiplicatore decresce: pertanto, quando quest'ultimo è zero, il prodotto sarà zero: pertanto se il moltiplicatore diminuisce ancora, cioè se diventa negativo, il prodotto crescerà di più e quindi diverrà maggiore di zero, e di conseguenza positivo; pertanto una quan-

tità negativa, moltiplicata per una quantità negativa darà un prodotto positivo. ([19], p. 3)

L'argomento è piuttosto persuasivo ma in sé non può considerarsi risolutivo perché offre il fianco a critiche come quella di Lazare Carnot (1753-1823) il quale, pur non occupandosi direttamente dell'argomento di Riccati e Saladini, considera una situazione simile, allo scopo di mostrare come le quantità negative non possono essere concepite in termini assoluti, come quantità minori di 0:

Sia, si dice, A una quantità; sottraiamo da essa una quantità minore a: la differenza $A - a$ sarà minore di A. Se supponiamo ora che a aumenti, $A - a$ diminuirà sempre più, diverrà 0 *quando a diventa uguale ad A; poi, aggiungono, se a continua a crescere, $A - a$ diverrà minore di 0.*

Per dimostrare che questo ragionamento è vizioso, basta far vedere che lo si potrebbe applicare allo stesso modo ad $\sqrt{A-a}$. In effetti, assegnato A, $\sqrt{A-a}$ diminuisce gradualmente al crescere di a; dunque dovrebbe diventare minore di 0, cioè a dire, semplicemente negativo e non immaginario, allorquando a diventi maggiore di A. Ciò che è falso. ([4], pp. xi-xii)

Le conclusioni di Carnot, benché non inoppugnabili, mettono in luce come un argomento quale quello addotto da Riccati e Saladini non sia *evidente* come sembra di primo acchito.

Passando a Saunderson, egli rende plausibile il fatto che le quantità negative siano minori di nulla seguendo un modello continuo di passaggio dal positivo allo zero per giungere alle quantità negative. Dopo aver distinto tra quantità positive e negative afferma:

The possibility of any quantitie's being less than nothing is to some a very great paradox, if not a downright absurdity; and truly so it would be, if we should suppose it possible for a body or substance to be less than nothing. But quantities, whereby the different degrees of qualities are estimated, may be easily conceived to pass from affirmation through nothing into negation. Thus a person in his fortunes may be said to be worth 2000 pounds, or 1000, or nothing, or -1000, or -2000; in which two last cases he is said to be 1000 or 2000 pounds worse than nothing: thus a body may be said to have 2 degrees of heat, or one degree, or no degree, or - one degree, or -2 degrees: thus a body may be said to have two degrees of motion downwards, or one degree, or no degree, or -one degree, or -two degrees, &c., &c. Certain it is, that all contrary quantities do necessarily admit of an intermediate state, which alike partakes of both extremes, and is best represented by a cipher or 0*: and if it is proper to say, that the degrees on either side this common limit are greater than nothing; I do not see why it should not be as proper to say of the other side, that the degrees are less than nothing; at least in comparison to the former. That what most perplexes narrow minds in this way of thinking, is, that in common life, most quantities lose their names when they cease to be affirmative, and acquire new ones so soon as they begin to be negative: thus we call negative goods, debts; negative gain, loss; negative heat, cold; negative descent, ascent, &c. (...) Difficulties that arise from the imposition of scanty and limited names, upon quantities which*

in themselves are actually unlimited, ought to be charged upon those names, and not upon the things themselves. (...) affirmative and negative quantities are only distinguished by their signs, as was observed before, and not by their names; the same letter representing both: these signs therefore in Algebra carry the same distinction along with them as do particles and adjectives sometimes in common language, as in the words convenient and inconvenient, happy and unhappy, good health and bad health, &c. ([22], pp. 50-51)

La dimostrazione della regola dei segni data da Saunderson fa ricorso alle progressioni artimetiche. Egli richiama il fatto che una progressione aritmetica è *completamente* individuata noti due suoi termini *consecutivi* e, in secondo luogo, che moltiplicando i termini di una progressione aritmetica per una stessa quantità si ottiene un'altra progressione aritmetica. Ammessi questi due principî—*which is in a manner self-evident*, chiosa Saunderson—egli illustra i quattro casi. Saunderson *non* usa le progressioni per dimostrare il caso $+ \times + = +$ ma fa appello al significato di moltiplicazione come addizione ripetuta. Nel caso $- \times + = -$ Saunderson considera un caso numerico specifico, quello di -4×3 ed afferma:

multiply the terms of this arithmetical progression 4, 0, -4 *into* $+3$, *and the products will be in arithmetical progression; but the two first products are* 12 *e* 0*; therefore the third will be* -12*; therefore* -4 *multiplied into* $+3$, *produces* -12[12] ([22], p. 57)

Osserviamo in dettaglio la costruzione: la regola autoevidente (almeno per Saunderson) che, moltiplicando i termini di una progressione aritmetica per un numero si ottiene un'altra progressione aritmetica è accettabile se i termini della progressione ed il fattore comune sono tutti positivi o, al più, se un termine è nullo, altrimenti si cadrebbe in una *petitio principii.* Per il caso $- \times + = -$, egli si ferma quando raggiunge lo 0 e poi genera la parte negativa della progressione così ottenuta dalla conoscenza dei termini $+12$ e 0. Quando identifica -12 con -4×3 egli in qualche modo *estende* il principio da cui è partito al caso di progressioni con termini negativi, senza dichiararlo.

Nel caso $+ \times - = -$, Saunderson considera l'esempio $+4 \times -3$ partendo dalla progressione 3, 0,-3: i primi due termini, moltiplicati per 4 danno la progressione 12, 0, che ha come termine successivo -12, *identificabile* con -3×4. Infine, utilizzando i risultati appena dimostrati, Saunderson moltiplica 3, 0 per -4, ottenendo la progressione -12, 0, il cui termine successivo è $+12$, identificabile con -3×-4. A conclusione del capitolo Saunderson offre un'altra dimostrazione:

These 4 cases may also be more briefly demonstrated thus: $+4$ *multiplied into* $+3$, *produces* $+12$*; therefore* -4 *into* $+3$, *or* 4 *into* -3 *ought to produce something contrary to* $+12$, *that is,* -12*: but if* -4 *into* $+3$ *produces* -12, *then* -4 *multiplied into* -3 *ought to produce something contrary to* -12, *that is,* $+12$*; so that this last case, so very formidable to young beginners, appears at last to amount to no more than a common principle in Grammar, to wit, that two*

[12] Si moltiplichino i termini della progressione aritmetica 4, 0, -4 per $+3$, e i prodotti saranno in progressione aritmetica, come prima; ma i primi due prodotti sono 12 e 0; pertanto il terzo sarà -12; quindi -4 moltiplicato per $+3$, fa -12

negatives make an affirmative; which is undoubtedly true in Grammar, though perhaps it may not always be observed in languages. ([22], p. 58)

Questa seconda spiegazione, se guadagna in concisione, perde a mio avviso in chiarezza, dato che richiede un esplicito riconoscimento del ruolo dello 0 come elemento neutro per la somma, come nella presentazione di MacLaurin. Al contrario, Saunderson non menziona esplicitamente lo zero e l'argomento perde di rigore. Una simile suggestione linguistica viene adombrata anche da Paolo Ruffini nel suo *Corso di Matematiche*: [21], pp. 24-26. Interessante è però quell' *or* con cui Saunderson fonde i due casi $+ \times -$ e $- \times +$, forma embrionale di un enunciato della proprietà commutativa del prodotto.

2.3 Un tocco femminile: Maria Gaetana Agnesi

Tra i pochi personaggi femminili che occupano un posto di rilievo nella storia della matematica figura Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) che nel 1748 pubblicò le *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* dove, nel capitolo iniziale, introduce le quantità negative e discute la regola dei segni in modo piuttosto originale. Anzitutto ella definisce il prodotto ricorrendo alle proporzioni:

La moltiplicazione altro non è, che una proporzione geometrica, di cui il primo termine sia l'unità; il secondo, e il terzo termine le due quantità, che devonsi moltiplicare; ed il quarto il prodotto. ([1], p. 6)

Non si tratta di una novità: ad esempio già Pietro Mengoli (1626-1686) introdusse il prodotto in questo modo nella sua *Geometria Speciosa* del 1659 [13]. In tempi più vicini alla Agnesi, Charles Reyneau (1656-1728) aveva proposto la stessa definizione nella *Science du Calcul de grandeurs* [18], sottolineandone la generalità, tanto da premettere queste parole al §72
Définition générale de la Multiplication par raport à toutes sortes de grandeurs. Il faut se la rendre très familière. ([18], p. 51)

Osserviamo che, grazie alla possibilità di permutare i medi senza alterare una proporzione, Reyneau deduce la proprietà commutativa del prodotto:
il prodotto di b per a è la stessa grandezza del prodotto di a per b; infatti, nel primo caso vale la proporzione $1 : a = b : c$ *e nel secondo caso si ha la sua alternata* $1 : b = a : c$*; ed essendo nell'uno e nell'altro caso determinati i primi tre termini, il quarto è sempre la stessa grandezza. Dunque* $a \times b = b \times a$*.* ([18], p. 51)

Che Maria Gaetana Agnesi potesse aver presente il testo di Reyneau non mi sembra improbabile visto che aveva studiato sulla sua *Analyse démontrée* sotto la guida del monaco olivetano Ramiro Rampinelli. La spiegazione della regola dei segni data dalla Agnesi è la seguente:
poiché il quarto [termine], per la natura della proporzione geometrica, deve essere moltiplo del terzo, come il secondo è moltiplo del primo; se il secondo, e terzo termine sono positivi, cioè se, per esempio, è $1, a :: b$*, al quarto, essendo l'unità, cioè il primo positivo, dovrà pure essere positivo il quarto. Sia negativo il secondo, e positivo il terzo, cioè sia* $1, -a :: b$*, al quarto; dovendo il quarto essere moltiplo del terzo, come il secondo è moltiplo del primo, ed essendo negativo il*

secondo, dovrà pure il quarto essere negativo. Sia positivo il secondo, negativo il terzo, cioè sia $1, a :: -b$*, al quarto; dovendo il quarto essere moltiplo del terzo, come il secondo è moltiplo del primo, ed essendo il secondo, ed il primo positivi, ed il terzo negativo, non potrà il quarto essere se non negativo. Sieno finalmente il secondo, ed il terzo negativi, cioè sia* $1, -a :: -b$*, al quarto; essendo il secondo moltiplo negativo del primo, bisognerà che il quarto sia moltiplo negativo del terzo; ma il terzo è negativo, e dunque dovrà il quarto essere positivo.* ([1], pp. 6-7).

La dimostrazione della Agnesi, per quanto originale, lascia un po' a desiderare dal punto di vista logico in quanto dire che, poichè a è multiplo positivo dell'unità, allora il prodotto di $a \times -b$, essendo $-b$ negativo, dovrà esso pure risultare negativo, sembra presupporre ciò che si vuole dimostrare. Inoltre, l'uso di proporzioni con termini di segni opposti è piuttosto insidioso, come sperimentato da Leibniz e Johann Bernoulli I nella controversia sui logaritmi di numeri negativi che, però, era appena stata resa di dominio pubblico quando apparvero le *Instituzioni*. Osserviamo come, al contrario, D'Alembert si servì della proporzione

$$1 : -1 :: -1 : 1$$

proprio per negare l'idea che i numeri negativi fossero minori di 0. Commentando la controversia tra Leibniz e Johann Bernoulli, d'Alembert ad un certo punto scrive

Mi sia dunque permesso di sottolineare come sia falsa l'idea che talvolta viene presentata a proposito delle quantità negative, dicendo che esse sono sotto lo 0. Prescindendo dall'oscurità di questa idea intesa metafisicamente, coloro i quali la vorranno refutare grazie al calcolo, potranno accontentarsi di questa proporzione $1 : -1 :: -1 : 1$*; proporzione reale perché il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medi e che dunque* $\frac{1}{-1} = -1$ *e* $\frac{-1}{1} = -1$*. Tuttavia se si pensasse alle quantità negative come al di sotto dello zero, 1 sarebbe* > -1*, &* $-1 < 1$*; così non potrebbe sussistere la proporzione.* ([6], p. 201)

Tornando invece a Reyneau, osserviamo che egli dà due dimostrazioni successive della regola, a seconda che i termini del prodotto siano interi o numeri frazionari.

Infine, non si può tralasciare Eulero che, nel 1770, scrisse un manuale di introduzione all'algebra che ebbe una certa fortuna, visto anche il prestigio dell'autore. Qui Eulero, che aderisce ad una visione newtoniana di numero, introduce i numeri negativi sul modello economico dei debiti contrapposti ai crediti e spiega la genesi dei numeri naturali e degli interi relativi in questo modo:

I numeri positivi si ottengono aggiungendo 1 a 0, cioè a niente e continuando ad aumentare in questo modo, sempre di una unità. Ecco l'origine dei numeri che vengono detti numeri naturali; di seguito, ecco i primi termini

$$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,$$

e via di seguito, all'infinito.

Se però, invece di continuare questa successione con addizioni ripetute, la si continuasse in senso opposto, sottraendo sempre una unità, si otterrebbe la serie seguente, dei numeri negativi

$$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$$

e così via all'infinito. ([5], pp. 12-13)

Definite poi le operazioni di somma, sottrazione e prodotto, si sofferma sulla regola dei segni in questo modo:

§31 *Sinora abbiamo considerato solo numeri positivi e non vi è alcun dubbio che i prodotti che abbiamo formato non possano essere che positivi: cioè* $+a$ *per* $+b$ *deve necessariamente dare* $+ab$*. Occorrerà però esaminare a parte il risultato della moltiplicazione di* $+a$ *per* $-b$*, e di* $-a$ *per* $-b$*.*

§32 *Iniziamo a moltiplicare* $-a$ *per 3 o* $+3$*; siccome* $-a$ *può considerarsi come debito, è chiaro che se si prende tre volte questo debito, esso dovrà diventare tre volte più grande e, di conseguenza, il prodotto cercato è* $-3a$*. Similmente se si tratta di moltiplicare* $-a$ *per* b*, si otterrà* $-ba$ *o, ciò che è lo stesso,* $-ab$*. Concludiamo da ciò, che, moltiplicando una quantità positiva per una quantità negativa, il prodotto sarà negativo; prendiamo perciò come regola che* $+$ *per* $+$ *fa* $+$ *o più e che, al contrario,* $+$ *per* $-$*, o* $-$ *per* $+$ *faccia* $-$ *o meno.*

§33 *Resta ancora da risolvere il caso in cui* $-$ *sia moltiplicato per* $-$ *o, per esempio,* $-a$ *per* $-b$*. È anzitutto evidente che, quanto alla parte letterale, il prodotto sarà* ab*; è però ancora incerto se davanti a questo prodotto occorra mettere il segno* $+$ *o il segno* $-$*; sappiamo solo cge ci vorrà uno o l'altro di questi segni. Ora, io dico che non può essere il segno* $-$*: perché* $-a$ *per* $+b$ *dà* $-ab$*, e* $-a$ *per* $-b$ *non può produrre lo stesso risultato di* $-a$ *per* b*; deve però risultarne l'opposto, cioè* $+ab$*; come conseguenza abbiamo questa regola:* $-$ *moltiplicato per* $-$ *fa più, come* $+$ *moltiplicato per* $+$*.* ([5]. pp. 20-22)

Dal punto di vista pedagogico l'esposizione è lacunosa: senza invocare la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma ed il ruolo dello zero, non si capisce perché $-a \times -b$ debba essere opposto a $-ab$. Ossserviamo poi che, se il modello economico è perfetto per sdoganare le quantità negative, esso lascia a desiderare quando lo si voglia usare per dedurre le operazioni: nel caso $-a \times 3$ esso funziona, mentre nel caso $3 \times -a$ non funziona affatto, a meno di dar per scontata la proprietà commutativa del prodotto, come Eulero sembra lasciar intendere al §31 dove, in effetti, egli afferma che occorre esaminare solo *due casi*: $+a \times -b$ e $-a \times -b$.

2.4 La regola dei segni nel XIX secolo

Nel 1821 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) pubblicò il *Cours d'Analyse Mathématique*, un'opera destinata a lasciare il segno nella storia dell'analisi. Nella prima parte, dedicata all'analisi algebrica, Cauchy introduce la distinzione tra numero e quantità: per numero, Cauchy intende la definizione aritmetica di stampo newtoniano come *misura assoluta di grandezze*. La nozione di quantità viene collegata ai *numeri preceduti dai segni* $+$ *o* $-$. Le quantità servono

ad esprimere un accrescimento od un decremento ed *il segno + o − posto davanti ad un numero ne modificherà il significato, come fa un aggettivo con un sostantivo* ([5], p.2). Di questa analogia linguistica Cauchy è debitore ad un lavoro dell'abate Adrien-Quentin Buée (1748-1826) sacerdote cattolico emigrato in Inghilterra nel 1792 in quanto rifiutò di giurare fedeltà alla Costituzione (*prètre réfractaire*). Nel 1806 egli pubblicò il suo unico lavoro in matematica [3] che però lo colloca tra i primi ad aver proposto una teoria geometrica per chiarire il significato delle quantità immaginarie. Nella prima sezione di [3] Buée aveva esposto alcune considerazioni sui segni + e − che, oltre che su Cauchy, esercitarono un certo influsso su George Peacock, il cui ruolo nella storia che stiamo ripercorrendo sarà analizzato nella prossima sezione. Buée criticava la visione newtoniana di Algebra come aritmetica universale, sostituendole quella di linguaggio matematico (*langue mathématique*) e considerava i segni + e − in due accezioni: come segni delle operazioni *aritmetiche* di addizione e sottrazione e come segni di operazioni *geometriche*, nel qual caso essi indicano direzioni *opposte*:
Se uno [di questi segni] significa che un segmento deve essere tracciato da sinistra verso destra, l'altro significa che esso deve essere tracciato da destra a sinistra ([3], p. 23)

L'analisi del significato dei segni + e − diviene interessante procedendo nella lettura del lavoro di Buée:
per conoscere che cosa significhi il segno − davanti ad una lettera, occorre conoscere che cosa significherebbe il segno + davanti alla medesima lettera e prendere per − il significato opposto.

Se, per esempio, +t significa un tempo passato, −t significa un tempo uguale ma futuro. Se +p indica una proprietà, −p indica un debito dello stesso valore, ecc. ([3], p.24)

Ritengo efficace questa osservazione, soprattutto con l'esempio cronologico in cui la quantità positiva viene interpretata come tempo *passato* e quella negativa come tempo *futuro*. Per inciso, tra le fonti che ho consultato, il lavoro di Buée sembra essere il primo in cui si introduce la retta temporale come esempio per illustrare la differenza tra quantità positive e negative: anche Peacock ne farà uso ma è possibile che abbia tratto l'ispirazione da Buée. Buée sviluppa due significati dei segni + e − che tiene a mantenere ben distinti:

1○ Posto davanti ad una quantità q, essi possono indicare, come ho detto, due operazioni aritmetiche opposte il cui soggetto è questa quantità [*q*].

2○ Davanti a questa stessa quantità, possono indicare due qualità opposte aventi per soggetto le unità da cui questa quantità è composta.

Nell'algebra ordinaria, cioè nell'algebra considerata come aritmetica universale, dove si astrae da ogni tipo di qualità, i segni + e − non possono che avere il primo di questi significati. Di conseguenza, in quest'algebra dove tutto è astratto, una quantità isolata può certamente portare con sé il segno + che, in quel caso, non aggiunge nulla all'idea di questa quantità; ma essa non può portare il segno −. (...) In effetti, poiché questa quantità è immaginata come isolata, se la si aggiunge non può che essere aggiunta allo zero; se la si sottrae, non può

che essere dallo zero. il primo [caso] è possibile, il secondo è assurdo. ([3], pp. 24-25)

Si vede da questo passo come l'accettazione dei numeri negativi fosse parziale e condizionata alla loro combinazione con numeri positivi.

Tornando a Cauchy, egli afferma che
In algebra non solo i numeri, ma anche le quantità sono rappresentate da lettere. Poiché si è convenuto di porre i numeri assoluti nella classe delle quantità positive, possiamo indicare la quantità positiva che ha A come valore numerico, sia attraverso $+A$ che A soltanto, mentre la quantità negativa opposta viene rappresentata da $-A$. Similmente, nel caso in cui la lettera a rappresenti una quantità si conviene di ritenere sinonimi le due espressioni a e $+a$ e di rappresentare con $-a$ la quantità opposta a $+a$. Queste osservazioni sono sufficienti per stabilire quanto è noto col nome di regola dei segni ([5], pp. 3-4)

Cauchy rimanda alla Nota I al termine del I volume del *Cours* per una discussione della regola. Qui, richiamati i concetti esposti all'inizio del corso, Cauchy si esprime in questi termini:

Se con A rappresentiamo sia un numero sia una quantità qualsiasi, e si pone

$$a = +A \qquad , \qquad b = -A,$$

si avrà

$$\begin{array}{ll} +a = +A & +b = -A \\ -a = -A & -b = +A. \end{array}$$

Se nelle ultime quattro equazioni vengono reinseriti, al posto di a e b i loro valori tra parentesi, si otterranno le formule

$$\begin{cases} +(+A) = +A\,, & +(-A) = -A, \\ -(+A) = -A\,, & -(-A) = A, \end{cases} \tag{1}$$

In ciascuna di queste formule il segno del secondo membro è quello che si chiama il prodotto dei due segni del primo membro. Moltiplicare due segni tra loro, significa formarne il prodotto. Un solo sguardo alle equazioni (1) basta a stabilire la regola dei segni, compresa nel teorema che ora enuncio:

I Teorema. *Il prodotto di due segni simili è sempre + ed il prodotto di due segni opposti è sempre −.* ([5], pp.404-405)

Osserviamo alcuni fatti relativi a questa formulazione. Anzitutto, aumenta il grado di astrazione: Cauchy non sente il bisogno di modelli od esempi numerici concreti a supporto della regola. Cauchy enuncia ancora la regola all'interno di un teorema, non di una definizione. Egli poi insiste sul fatto che vengono moltiplicati i *segni*, slegando la validità della regola alla natura delle quantità cui essa viene applicata:

Una conseguenza immediata delle definizioni precedenti è che la moltiplicazione dei segni non ha alcun rapporto con la moltiplicazione dei numeri. Ciò non deve sorprendere se si osserva che la nozione di prodotto di due segni si presenta fin dai primi passi che si muovono in analisi, visto che nell'addizione o sottrazione di un monomio, il segno di questo monomio viene veramente moltiplicato per il segno + o −. ([5], p. 406)

Credo che questa asserzione evidenzi la distinzione tra gli elementi di un insieme e la *struttura* che viene indotta in esso grazie alle proprietà delle operazioni che mettono in relazione elementi dell'insieme stesso.

2.5 Il principio di permanenza delle proprietà formali: Peacock ed Hankel

Abbiamo già visto con Buée come la visione newtoniana di algebra come aritmetica universale non fosse più ritenuta pienamente soddisfacente. La critica si fa più serrata nelle opere di George Peacock (1791-1858): già nel *Treatise on Algebra* del 1830 e poi nella riedizione in due volumi della stessa opera, pubblicati nel 1842 e 1845: il primo dedicato all'*algebra aritmetica*, l'altro all'*algebra simbolica*. Ecco come iniziava il *Treatise* del 1830:

Algebra has always been considered as merely such a modification of Arithmetic as arose from the use of symbolical language, and the operation of one science have been transferred to the other without any statement of an extension of their meaning and application: thus symbols are assumed to be the general and unlimited representatives of every species of quantity: the operations of Addition and Subtraction in their simple arithmetical sense, are assumed to be denoted by the signs + and −, and to be used in connecting such symbols with each other: Multiplication and Division, two inverse operations in Arithmetic, are supposed to be equally applicable to all quantities which symbols may denote, without any necessary modification of their meaning: but at the same time that the primitive assumption of such signs and operations is thus carefully limited in the extent of their signification, there is no such limitation imposed upon the extent of their application: thus it is not considered necessary that the operations of Addition and Subtraction should be confined to quantities of the same kind, or that the quantities subtracted should be less than the quantities from which they are subtracted: and when the violation of this restriction, which would appear to be rendered necessary by the primitive meaning of these operations, has led to the independent existence of the signs + and −, as an assumption which is also necessary in order to preserve the assumed universality of the values of the symbols and of the possibility of the operations which they designate, it is not considered that by this additional usage of them, we have altogether abandoned the definitions of these operations in practice, though we have retained them in name (...) and the imposition of the names of Addition and Subtraction upon such operations, and even their immediate derivation from a science in which their meaning and applications are perfectly understood and strictly limited, can exercise no influence on a science, which regards the combinations of signs and symbols <u>only</u>, according to determinate laws, which are altogether independent of the specific values of the symbols themselves.

It is this immediate derivation of Algebra from Arithmetic, and the close connection which it has been attempted to preserve between those sciences, which has led to the formation of the opinion, that one is really <u>founded</u> upon the other.

(...) It may be proper to exhibit at some length the successive transitions which are made from the principles and operations of Arithmetic to those of Algebra, in order to shew that their connection is not necessary but conventional, and that Arithmetic can only be considered as a Science of Suggestion, to which the principles and operations of Algebra are adapted, but by which they are neither limited nor determined. ([15], p. vi-viii)

Questa analisi mette in luce la necessità di non subordinare le regole dell'algebra a modelli validi solo in aritmetica (che Peacock chiama *Arithmetic Algebra* quando i numeri sono rappresentati da lettere). Occorre certo richiedere che, quando le quantità algebriche si riducono ai numeri trattati in aritmetica, vi sia coincidenza delle regole dell'algebra (*Symbolic Algebra*) con l'aritmetica ma quest'ultima non può avere un ruolo fondazionale per l'algebra:

Thus $a - (a + b)$ would obviously express an impossible operation in such a system of Algebra; but if $(a+b)$ was replaced by a single symbol c, the expression $a - c$, though equally impossible with $a - (a + b)$, would cease to express it. The assumption however of the independent existence of the signs $+$ and $-$ removes this limitation, and renders the performance of the operation denoted by $-$ equally possible in all cases: and it is this assumption which effects the separation of arithmetical and symbolical Algebra, and which renders it necessary to establish the principles of this science upon a basis their own. (...) It must be considered therefore as an independent principle, which is suggested as a means of evading a difficulty which results from the application of arithmetical operations to general symbols.

It is the admission of this principle, in whatever manner we are led to it, which makes it necessary (...) to give a form to the definitions of the operations of Algebra, which must render them independent of any subordinate science. ([15], p. ix)

L'impostazione vista in Cauchy, dove le regole di combinazione dei segni sono sganciate da ogni quantità legata eventualmente ad essi, risulta la necessaria conseguenza dell'approccio metodologico di Peacock:

In framing the definitions of algebraic operations, to which symbols thus affected are subjected, we must necessarily omit every condition which is in any way connected with their specific value or representation: in other words, the definitions of those operations must regard the law of their combination <u>only</u>: thus the operations denoted by $+$ and $-$ must regard the <u>affectation</u> of symbols (with the proper signs $+$ and $-$, whether accompanied or not by any other signs of affection which they are capable of receiving) by them, according to an <u>assumed</u> law for the <u>concurrence</u> of those signs. ([15], pp. ix-x)

Dopo questa preparazione, Peacock enuncia il pricipio di permanenza delle forme equivalenti:

The principle of the permanence of equivalent forms, which appears to me so important in generalizing the results of algebraical operations, must derive its authority from the view which I have taken of the principles of Algebra and of their connections with Arithmetic, considered as a science of suggestion: for in the first place, this principle assumes the operations of Algebra and their results

altogether independent of the specific values of the symbols, and equivalent forms as existing therefore whatever values such symbols may be supposed to possess, so long as they are general in form: and in the second place, it enables us to consider the equivalent forms obtained in arithmetical Algebra, where the symbols are general in form, though specific in value, as necessarily the same likewise in symbolical Algebra, if any such forms exist as the result of algebraical operations. ([15], pp. xvii-xviii)

One of the most important consequences of this view of the principles and operations of Algebra, is the complete separation which it effects of the laws for the combination of symbols from the principles of their interpretation: in common systems of Algebra, the previous interpretation, assumed or understood, of the operations of Algebra, determines, or is supposed to determine, the results which are obtained, and the laws of symbolical combinations: but the case is reversed in the system which I have ventured to propose, where the laws of symbolical combinations are assumed, not arbitrarily, but with a general reference to their anticipated interpretation in the subordinate science of arithmetic, whilst the interpretations of the results obtained are entirely determined in accordance with those laws by a reference to the specific values of the symbols. ([15], pp. xx-xxi)

La definizione newtoniana di algebra come aritmetica universale viene ritenuta troppo restrittiva da Peacock in quanto

It assigns for the general object of the science, what can only be considered as one of its applications. ([15], p. 1)

Al contrario, Peacock concepisce l'algebra come *the science of general reasoning by symbolical language.* ([15], p. 1) La regola dei segni non è più un teorema da dedurre ma una regola posta a fondamento dell'edificio algebrico:

Symbols may be incorporated into each other, so as to represent a new quantity of the same or a different kind, as in the operations of Multiplication and Division: in this case, the quantity which is the result of the operation, must have some determinate sign, dependent upon the signs of the symbols incorporated. In like manner, in combining symbols together by the operations of Addition and Substraction, which are denoted by the same signs + or −, by which the symbols themselves are affected, similar or dissimilar signs must come together, which it is expedient, in order to prevent confusion, to incorporate them into one. In both cases, they are subject to the following rule, which is assumed and not proved, and which may be considered as constituting one of the most important first principles of this science.

Whenever by the incorporation or combination of two symbols, two similar signs come together, whether + and + or − and −, they are replaced by the single sign +: but if the two signs are dissimilar, whether + and − or − and +, they are replaced by the single sign −. ([15], p. 3)

Vediamo all'opera il principio di permanenza formulato da Peacock nel caso della regola dei segni. Si parte da due ipotesi di fondo:

Art. 566 *1st. Symbols which are general in form, are equally general in representation and value.*

2nd. The rules of the operations of multiplication and division in Arithmetical Algebra, when applied to symbols which are general in form though restricted in value, are applied without alteration to the operations bearing the same names in Symbolical Algebra, when the symbols are general in their value as well as in their form.

It will follow from the second assumption that all the results of the operations of multiplication and division in Arithmetical Algebra, will be results likewise of Symbolical Algebra, but not conversely.

Art. 567. The same three Cases of the operation of multiplication present themselves in Symbolical and in Arithmetical Algebra: they are as follows:

1st. When the multiplicand and the multiplier are mononomials[13].

2nd. When the multiplicand is a polynomial and the multiplier is a mononomial.

3rd. When both the multiplicand and multiplier are polynomials.

In Arithmetical Algebra, the rule for the concurrence of like and unlike signs is required in the 2nd and the 3rd Cases only: but in Symbolical Algebra, the occurrence of symbols or single terms affected by the signs + and − used independently renders its application necessary in all the three Cases under consideration.

Art. 568. In order to shew that the Rule of signs is a necessary consequence of the assumptions made in Art. 566, we shall consider the product of $a-b$ *and* $c-d$ *as determined by the principles of Arithmetical Algebra, which is*

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd. \tag{1}$$

Assuming, therefore, the permanence of this result, or in other words, the equivalence of the two members of which is composed, for all values of the symbols, we may suppose two of their number to become successively equal to zero: thus, if we suppose $b = 0$ *and* $d = 0$*, the product (1) in question becomes*

1st. $(a-0)(c-0) = ac - a \times 0 - 0 \times c + 0 \times 0$*, or* $a \times c = ac$*, obliterating the terms which involve zero.*

If we suppose $b = 0$ *and* $c = 0$*, we get,*

2nd. $(a-0)(0-d) = a \times 0 - ad - 0 \times 0 + 0 \times d$*, or* $a \times -d = -ad$*.*

If we suppose $b = 0$ *and* $c = 0$*, we get,*

3rd. $(0-b)(c-0) = 0 \times c - 0 \times 0 - bc + b \times 0$*, or* $-b \times c = -bc$*.*

If we suppose $a = 0$ *and* $c = 0$*, we get,*

4th. $(0-b)(0-d) = 0 \times 0 - 0 \times d - b \times 0 + bd$*, or* $-b \times -d = bd$*.*

It follows therefore generally, as a necessary consequence of the assumptions (Art. 566), which form the foundation of the results of multiplication in Symbolical Algebra, that when two like signs, whether + and + or − and −, concur in multiplication, they are replaced in the product by the single sign +: and that

[13] i *mononomials* sono i monomi.

when two unlike signs similarly concur, whether + and −, or − and +, they are replaced in the product by the single sign −. ([17], pp. 17-18)

Dopodiché Peacock procede ad illustrare la regola di prodotto nei tre casi menzionati in precedenza trovando prima il valore del segno, con la regola appena enunciata, poi il valore del coefficiente ed infine il valore delle potenze con cui figurano nel prodotto le lettere dei singoli fattori. Quindi, l'idea dietro al principio di permanenza usato da Peacock è quella di servirsi di risultati ottenuti nell'ambito dell'algebra aritmetica, *supporre* di estenderne la validità quando i simboli sono slegati dalle limitazioni proprie dell'aritmetica e porli a fondamento dell'algebra simbolica. Tutte le pretese dimostrazioni della regola avanzate nei secoli precedenti lasciavano inespressa queste estensione e pretendevano di dimostrare in generale un risultato ottenuto nello spazio ristretto dell'aritmetica, fosse pure simbolica. Per concludere questa lunga esposizione dell'approccio di Peacock, osservo che nella *Arithmetic Algebra* egli aveva dedotto *in campo aritmetico* la regola $(a-b)c = ac - bc$ con un argomento *alla* Viète:

It is obvious that the product of $a-b$ by c, will be less than the product of a by c, by the product of b by c. ([16], Art.26, p. 25)

Quanto al prodotto $(a-b)(c-d)$, Peacock è più formale e procede ponendo $x = a - b$, in modo da eseguire il prodotto richiesto in base a quanto stabilito all'Art. 26:

$$(a-b)(c-d) = x(c-d) = cx - dx = c(a-b) - d(a-b)$$

ed iterare il procedimento per giungere a

$$(a-b)(c-d) = c(a-b) - d(a-b) = ca - bc - (da - db)$$

ed infine arrivare al risultato cambiando i segni ai termini tra parentesi, secondo la regola che aveva spiegato all'Art. 21 (*cfr.* [16], p. 29).

Più che a Peacock, il principio di permanenza delle proprietà formali (*Princip der Permanenz formaler Gesetze*) è legato al nome di Hermann Hankel (1839-1873) che lo formulò nel 1867:

Quando due simboli algebrici espressi in forma generale sono uguali tra loro, debbono restare anche uguali quando i simboli cessano di denotare semplici grandezze, e dunque le operazioni acquistano un contenuto di qualche altra natura.[14]. ([10], p. 11)

Hankel definisce in astratto delle operazioni come legami, diretti od inversi, tra oggetti astratti che godono di certe proprietà dichiarate esplicitamente: per l'addizione e la moltiplicazione la proprietà associativa e la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma, da cui la regola dei segni viene dedotta. Definita la sottrazione $(a-b)$, tra due oggetti a e b come quell'oggetto che, sommato a b restituisce a, cioè

$$(a-b) + b = a$$

[14] Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen.

e lo zero come *modulo* (*Modul*) della somma, cioè tale che $a + 0 = a$, qualunque sia l'oggetto a, Hankel definisce $-a$ come risultato b dell'operazione $0 - a$. Introdotta la moltiplicazione nei termini accennati sopra con la proprietà di essere associativa e distributiva rispetto all'addizione, Hankel *deduce* la regola dei segni da quest'ultima proprietà:

$$(a + b)c = ac + bc$$

pone $b = -a$ cosicché $(a + (-a))c = 0$, cioè $ac + (-a)c = 0$ e dunque

$$(-a)c = -ac.$$

Scritta l'altra forma della proprietà distributiva

$$a(c + d) = ac + ad$$

e posto in essa $d = -c$ si ricava

$$a(-c) = -ac$$

e, infine, sostituito c con $-c$ in $(-a)c = -ac$ ricava

$$(-a)(-c) = ac$$

concludendo

Possiamo dunque far discendere la nota regola di moltiplicazione tra numeri negativi dal principio distributivo.[15] ([10], p. 32)

Finora Hankel ha parlato di segni (*zeichen*) che rappresentano oggetti (*Objecte*): ma cosa sono i numeri per Hankel?

Un numero è l'espressione di alcuni collegamenti formali di oggetti qualsiasi tra loro; un sistema di numeri rappresenta una serie sistematicamente ordinata di tali collegamenti o connessioni, la cui essenza determina il carattere del sistema di numeri. ([10], p. 36)

Invocando il principio di permanenza per *definire* la regola dei segni, Hankel commenta:

Non si sottolineerà mai abbastanza, a fronte di una visione generale alquanto diffusa, che queste equazioni [quelle che esprimono la regola dei segni] in una matematica formale non possono più essere dimostrate; sono convenzioni arbitrarie per permettere la conservazione del formalismo nel calcolo. (Al contrario, si considerino i numeri come rappresentanti dei punti di una retta o, come è stato detto in termini astratti, dei progressi, in quel caso è possibile mostrare le equazioni, come è noto.) ([10], p. 41).

Una esposizione molto chiara, in qualche senso operativa, del principio di permanenza si trova nell'articolo sui fondamenti dell'aritmetica scritto da Hermann Schubert nel 1898 e che inaugura la monumentale *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.* Qui Schubert elenca i quattro passi in cui si articola il principio nel caso dell'estensione di un campo numerico:

[15] Können so die bekannten Regeln der Multiplication negativer Zahlen aus dem distributiven Princip abgeleitet werden.

in primo luogo, ad ogni complesso di simboli che non rappresenti numeri già noti si conferisca un senso tale da poterlo trattare secondo le stesse regole, come se rappresentasse uno dei numeri definiti sino a quel punto;

in secondo luogo, si definisca un tale complesso di simboli come numero, in senso lato e di conseguenza si estenda il concetto di numero;

in terzo luogo, si dimostri che per i numeri intesi in senso lato valgono gli stessi teoremi validi per i numeri in senso non ancora esteso;

in quarto luogo, si definisca il significato di uguale, maggiore e minore nel nuovo campo numerico. ([23], p. 11)

In conclusione, mi sembra di poter dire che, nel passare da teorema a norma posta a fondamento dell'algebra, la regola dei segni abbia seguito un cammino simile alla definizione di insieme infinito proposta da Dedekind, come insieme che può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio: questa proprietà che apparve per secoli un *paradosso* che doveva mettere in guardia dalla natura contraddittoria del concetto di infinito diventa un punto di partenza, una *definizione* da cui trarre le conseguenze logiche. Qui, i tentativi di dimostrare la regola dei segni a partire dalla proprietà distributiva, valida in campo aritmetico, invocavano più o meno implicitamente la necessità di estendere la validità delle proprietà fondamentali delle operazioni elementari: se da una parte, il non aver messo in luce questo aspetto, ha causato una infinità di controversie, l'approccio pragmatico, concreto, alla matematica non ha permesso che tali indecisioni rallentassero lo sviluppo dell'algebra, come vedremo nei capitoli che seguono.

Bibliografia

[1] M.G. Agnesi: *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana.* Vol. I, Milano, nella Regia Ducal Corte, (1748).

[2] E. Bezout: *Cours de Mathématiques a l'usage des gardes du pavillon et de la marine.* III partie. Parigi, Musler, (1773).

[3] A.-Q. Buée: Mémoire sur les quantités imaginaires, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **96**, 23–88, (1806).

[4] L. Carnot: Géométrie e position. Duprat, Parigi, (1803).

[5] A.-L. Cauchy: *Cours d'analyse de l'École royale Polytechnique*, Debure, (1821).

[6] J. Le Ronde D'Alembert: Sur les Logatihmes des quantités négatives. In *Opuscules Mathématiques* Vol. I, Parigi, David, 180-209 (1761).

[7] Diofanto: *Diophani Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis. Vol. I.* ed. P. Tannery. Teubner, Leipzig, (1893).

[8] L. Euler: *Élémens d'algèbre. Vol. I: De l'Analyse determinée.* Traduit de l'allemand. Lione, Bruyset, (1795-96), Anno III dell'era repubblicana.

[9] M. Ferrari: La regola dei segni e la sua storia. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, **25**B, 313-345, (2002).

[10] H. Hankel: *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. I Theil. Theorie der complexen Zahlensysteme.* Voss, Leipzig, (1867).

[11] N. L. de La Caille: *Leçons élémentaires des mathématiques.* Parigi, Desaint, (1784).

[12] C. MacLaurin; *A Treatise of Algebra.* Millar and Nourse, London, (1748).

[13] P. Mengoli *Geometriae Speciosae Elementa.* Bologna, Ferroni, (1659).

[14] I. Newton: *Arithmetica Universalis sive de compositione et resolutione arithmetica Liber.* Lugduni Batavorum (Leida), Veerbeck, (1732).

[15] G. Peacock: *A treatise on Algebra.* Smith, Cambridge, (1830).

[16] G. Peacock: *A treatise on Algebra. Vol. I Arithmetical Algebra.* Cambridge, at the University Press, (1842).

[17] G. Peacock: *A treatise on Algebra. . Vol. I Symbolical Algebra and its applications to the geometry of position.* Cambridge, at the University Press, (1845).

[18] C. Reyneau: *Science du Calcul de grandeurs en general, ou les élémens des mathématiques.* Parigi, Quillau, (1714).

[19] V. Riccati, G. Saladini: *Institutiones Analyticae Tomus I.* Bologna, Tip. S. Tommaso, (1765).

[20] M. Rolle: *Traité d'Algèbre; ou principes generaux pour resoudre les questions de mathématique.* Parigi, Michallet, (1690).

[21] P. Ruffini: *Corso di Matematiche ad uso degli aspiranti Alla Scuola d'Artiglieria, e Genio di Modena*, Tomo III. Modena, Soc. tipografica, (1807).

[22] N. Saunderson: *The Elements of Algebra in Ten Books.* Cambridge, at the University Press (1790).

[23] H. Schubert: *Grundlagen der Arithmetik.* In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Erster Band: Arithmetik und Algebra.* Redigiert von W.F. Mayer. Erster Teil. Leipzig, Teubner, (1898).

[24] S. Stevin: *L'Arithmétique.* In *The principal works of Simon Stevin. Mathematics* vol. IIB. Ed.: J. Struik. Amsterdam (1958).

[25] F. Viète: *In artem analyticem isagoge* (1591). In *Francisci Vietae Opera Mathematica*, curatore F. van Schooten, 1–12, (1646).